オイラーの定数の2重積分表示について (Computer Algebra : Design of Algorithms, Implementations and Applications)

AUTHOR(S):

西沢, 清子; 宮崎, 里美

数理解析研究所講究録
1514巻 2006年 190-196

オイラーの定数の2重積分表示について

西沢 清子
城西大学*
NISHIZAWA, KIYOKO
JOSAI UNIVERSITY

宮崎 里美
城西大学
MIYAZAKI, SATOMI
JOSAI UNIVERSITY

1 序

次式で定義される有名な定数であるオイラーの定数 γ :

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

は、未だに有理数か無理数か分かっていない。リーマン・ゼータ関数:

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots$$

については1978年6月、R.Apery によって $\zeta(3)$ の無理数性が示された。同年8月、Helsinki で行われた ICM にて、H.Cohen によっても示された。1979年、F.Beukers は $\zeta(2),\zeta(3)$ の無理数性の証明を2重積分により平易な方法で示した。本論文では、J.Sondow によるオイラーの定数の2重積分による表示について考察する。すなわち、オイラーの定数の2重積分表示がどのようにして得られたかを紹介する。

$$\gamma=\int_0^1\int_0^1\frac{1-x}{(1-xy)(-\log xy)}dxdy.$$

Sondow の動機は、$\zeta(2),\zeta(3)$ の2重積分表示:

$$\zeta(2)=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}dxdy,\qquad \zeta(3)=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1\frac{-\log xy}{1-xy}dxdy$$

より $\zeta(2)$ と $\zeta(3)$ の無理数性が示されたことに影響されたものである。

1998年、Sondow はオイラーの定数の交代公式の別証明を示した。また、2004年5月、P.Hadjicostas は Γ -関数と ζ -関数の深い関係を示すものの1つといえる次の予想を与えた。

予想 $z\in\mathbb{C},\mathbb{R}(z)>-2$ を満たすとき次式が成立する:

$$\int_0^1\int_0^1\frac{1-x}{1-xy}(-\log xy)^z dxdy=\Gamma(z+2)\left(\zeta(z+2)-\frac{1}{z+1}\right).$$

同年6月、この予想が $\mathbb{R}(z)>-1$ の場合は成り立つことが R.Chapman によって証明された。この結果と、交代公式の別証明を合わせることによって、2005年、Sondow によってオイラーの定数が2重積分表示できるということが示された。上記の結果からオイラーの定数の無理数性を証明出来ないかという問題を Sondow は以下の論文中で取り上げている ([Son03],[Son03a],[Son04]) 。また無理数であることは知られている交代オイラーの定数: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}\right)\left(=\log\frac{4}{\pi}\right)$ の2重積分表示の可能性についても論じる。

*kiyoko@math.josai.ac.jp

2 オイラーの定数の交代公式

オイラーの定数に関する交代公式自体はよく知られているが、最近 J.Sondow によって別証明が示された。ここでその証明を紹介する ([Son98])。

リーマン・ゼータ関数と素数との関連は、次の事実が有名である。

オイラーによる等式

$$\zeta(s)=\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}=\frac{2^s}{2^s-1}\cdot\frac{3^s}{3^s-1}\cdot\frac{5^s}{5^s-1}\cdots,\quad \mathbb{R}(s)>-1$$

注意 1

$\zeta(s)-\dfrac{1}{s-1}$ は $\mathbb{R}(s)>0$ で解析的な関数である。すなわち $\zeta(s)$ は $s=1$ を 1 位の極とし、それ以外では $\mathbb{R}(s)>0$ で解析的である。

オイラーの定数の交代公式 (antisymmetric formula)

$$\gamma=\lim_{x\to1^+}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^x}-\frac{1}{x^n}\right)=\lim_{x\to1^+}\left(\zeta(x)-\frac{1}{x-1}\right)$$

証明 ([Son98]) はじめに $x>1$ のとき、級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^x}-\dfrac{1}{x^n}\right)$ の一様収束性について示す。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^x}-\frac{1}{x^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^x}-\int_n^{n+1}\frac{1}{t^x}dt\right). \tag{1}$$

Weierstrass の M-test により、区間 (1,2] 上で級数は一様収束して意味を持つ：

$$\begin{aligned}0<\frac{1}{n^x}-\int_n^{n+1}\frac{1}{t^x}dt&=\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^x}-\frac{1}{t^x}\right)dt=x\int_n^{n+1}\left(\int_n^t u^{-x-1}du\right)dt\\&\le xn^{-x-1}\int_n^{n+1}\left(\int_n^t du\right)dt=xn^{-x-1}\int_n^{n+1}(t-n)dt=\frac{1}{2}xn^{-x-1}\le\frac{1}{n^3}\end{aligned}$$

オイラーの定数 γ は

$$\gamma=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{t^1}dt\right) \tag{2}$$

と表せることより、(2) は (1) の $x\to1^+$ としない式に $x=1$ を代入したものに他ならない。つまり $x\to1^+$ としたとき γ となることを示している：$\gamma=\lim_{x\to1^+}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^x}-\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{t^x}dt\right)$. ∎

3 F.Beukers による $\zeta(2)$ と $\zeta(3)$ の無理数性

F.Beukers による $\zeta(2)$ の無理数性を紹介する ([Beu79]) 。Beukers は $\zeta(2),\zeta(3)$ の２重積分表示から、これらの無理数性を証明した。

3.1 素数定理と最小公倍数について

$1,2,\cdots,n$ の最小公倍数を d_n とする。また $1,2,\cdots,n$ までの n 以外の素数の個数を $\pi(n)$ とする。d_n は $d_n=\prod_{i=1}^{\pi(n)}P_i^{e_i}$ と素因数分解される。ただし P_i は i 番目の素数で d_n の約数ではない素因子 P_j については $e_j=0$ としている。このとき、各 P_i について $P_i^{e_i}\le n<P_i^{e_i+1}$ となる。

命題 1
d_n について次の評価式が成り立つ：

$$d_n < 3^n$$

証明 d_n については次式が成立する：

$$d_n = \prod_{p_{prime} \leq n} p^{[\frac{\log n}{\log p}]} < \prod_{p_{prime} \leq n} p^{\frac{\log n}{\log p}} = n^{\pi(n)}.$$

素数定理 $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1$ から $\forall\varepsilon > 0$ について $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ なので $\forall n > n_0$ において $\pi(n) < (1+\varepsilon) \cdot \frac{n}{\log n}$ となる。ここで $\varepsilon = 0.09(< \log 3 - 1 = 0.98\cdots)$ に対する n_0 をとると、$\forall n > n_0$ に対して

$$\pi(n) < (1+\varepsilon) \cdot \frac{n}{\log n} < (\log 3) \cdot \frac{n}{\log n}$$

したがって $d_n = \prod_{i=1}^{\pi(n)} P_i^{e_i} \leq n^{\pi(n)} < n^{(\log 3)\cdot(\frac{n}{\log n})} = 3^n$. ∎

3.2 $\zeta(2)$ と $\zeta(3)$ の 2 重積分表示

ここでは F.Beukers による $\zeta(2)$ と $\zeta(3)$ の積分表示について述べる ([Beu79]) 。$\zeta(2) < 2$ に注意する。

定理 2

$$\zeta(2) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dxdy, \qquad \zeta(3) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\log xy}{1-xy} dxdy$$

証明

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dxdy &= \int_0^1 \int_0^1 (1 + xy + x^2y^2 + \cdots) dxdy \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 (1 + xy + x^2y^2 + \cdots) dx \right\} dy \\
&= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \zeta(2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \frac{-\log xy}{1-xy} dxdy &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{-(\log x + \log y)}{1-xy} dxdy \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{-\log x}{1-xy} dx + \int_0^1 \frac{-\log y}{1-xy} dx \right\} dy \\
&= 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \zeta(3)
\end{aligned}$$

∎

3.3 $\zeta(2)$ の無理数性について

ここでは F.Beukers による $\zeta(2)$ の無理数性について述べる ([Beu79]) 。

定理 3
$r,s\in\mathbb{N}\cup 0,\ r>s$ のとき $\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-xy}(x^r y^s)dxdy$ は有理数で、その分母は ${d_r}^2$ の約数である。そして $r=s$ のとき

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-xy}(x^r y^s)dxdy=\zeta(2)-\frac{1}{1^2}-\cdots-\frac{1}{r^2}$$

である。特に $r=s=0$ のとき、分数部分を 0 とみなすので $\zeta(2)=\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-xy}dxdy$ と表せる。

補題 4
$r>s$ とし、σ は任意の負の数でないとする。このとき次式が成立する：

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-xy}(x^{r+\sigma}y^{s+\sigma})dxdy=\frac{1}{r-s}\left\{\frac{1}{s+1+\sigma}+\cdots+\frac{1}{r+\sigma}\right\}$$

証明 $\frac{1}{1-xy}=1+xy+(xy)^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n$ より

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-xy}(x^{r+\sigma}y^{s+\sigma})dxdy &= \int_0^1 y^{s+\sigma}\int_0^1 x^{r+\sigma}(1+xy+x^2y^2+\cdots)dxdy\\
&= \int_0^1 y^{s+\sigma}\sum_{k=0}^{\infty}y^k\int_0^1 x^{k+r+\sigma}dxdy\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+r+\sigma+1}\int_0^1 y^{k+s+\sigma}dy\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+r+\sigma+1)(k+s+\sigma+1)}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r-s}\left\{\frac{1}{k+s+\sigma+1}-\frac{1}{k+r+\sigma+1}\right\}
\end{aligned}$$

$r=s+l, s+\sigma+1=t$ とおく。

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r-s}\left\{\frac{1}{k+s+\sigma+1}-\frac{1}{k+r+\sigma+1}\right\}\\
&=\frac{1}{r-s}\left\{\frac{1}{s+\sigma+1}-\frac{1}{r+\sigma+1}+\frac{1}{s+\sigma+2}-\frac{1}{r+\sigma+2}+\cdots\right\}\\
&=\frac{1}{r-s}\left\{\frac{1}{s+\sigma+1}-\frac{1}{s+l+\sigma+1}+\frac{1}{s+\sigma+2}-\frac{1}{s+l+\sigma+2}+\cdots\right\}\\
&=\frac{1}{r-s}\left\{\frac{1}{t}-\frac{1}{t+l}+\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+1+1}+\cdots\right\}\\
&=\frac{1}{r-s}\left\{\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t+2}+\cdots+\frac{1}{t+l-1}\right\}\\
&=\frac{1}{r-s}\left\{\frac{1}{s+1+\sigma}+\frac{1}{s+2+\sigma}+\frac{1}{s+3+\sigma}+\cdots+\frac{1}{r+\sigma}\right\}
\end{aligned}$$

ここで $\sigma=0$ とおくと

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-xy}(x^r y^s)dxdy=\frac{1}{r-s}\left\{\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}+\cdots+\frac{1}{r}\right\}$$

と表される。上記の式の右辺は有理数である。これを $\frac{q}{p}$ とする。分母 p が ${d_r}^2$ の約数であることを示す。
$r-s$ は d_r の約数であり、$s+i$ は d_r の約数である：

$$\frac{q}{p}=\frac{1}{r-s}\left\{\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}+\cdots+\frac{1}{r}\right\}=\frac{m}{{d_r}^2}$$

の形になる。ただし m は整数である。これにより p は ${d_r}^2$ の約数である。

次に $r=s$ と仮定する。

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}(x^{r+\sigma}y^{r+\sigma})dxdy &= \int_0^1\int_0^1(xy)^{r+\sigma}(1+xy+x^2y^2+\cdots)dxdy\\ &= \int_0^1\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}(xy)^{k+r+\sigma}dxdy\\ &= \int_0^1 y^{k+r+\sigma}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 x^{k+r+\sigma}dxdy\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+r+\sigma+1}\int_0^1 y^{k+r+\sigma}dy\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+r+\sigma+1)^2}\end{aligned}$$

と表すことが出来る。$\sigma=0$ のとき

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}(x^r y^r)dxdy &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+r+1)^2}\\ &= \frac{1}{(r+1)^2}+\frac{1}{(r+2)^2}+\frac{1}{(r+3)^2}+\cdots\\ &= \zeta(2)-\frac{1}{1^2}-\cdots-\frac{1}{r^2}\end{aligned}$$

となる。 ∎

次の補題は上の定理より明らかである。

補題 5

次の積分は $A_n\in\mathbb{Z}, B_n\in\mathbb{Z}$ を使って次の表現を持つ:

$$\int_0^1\int_0^1\frac{(1-y)^nP_n(x)}{1-xy}dxdy=(A_n+B_n\zeta(2)){d_n}^{-2} \tag{3}$$

ここで $P_n(x)\in\mathbb{Z}[x]$ は *Legendre-type* の多項式であり

$$n!P_n(x)=\left\{\frac{d}{dx}\right\}^n x^n(1-x)^n$$

によって与えられている。

定理 6

$\zeta(2)$ は無理数である。

証明 (3) の左辺を x に関して n 回部分積分して式変形する:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1\int_0^1\frac{(1-y)^nP_n(x)}{1-xy}dxdy\right| &= \left|\int_0^1\int_0^1\left(\frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy}\right)^n\frac{1}{1-xy}dxdy\right|\\ &\le \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n}\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}dxdy=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n}\zeta(2)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
0 < |A_n + B_n\zeta(2)| &= {d_n}^2 \left| \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy} \right)^n \frac{1}{1-xy} dxdy \right| \\
&< {d_n}^2 \left\{ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right\}^{5n} \zeta(2) < (3^n)^2 \left\{ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right\}^{5n} \zeta(2) \\
&< 2\left\{ \frac{48}{59} \right\}^n
\end{aligned}
$$

$\zeta(2)$ が有理数であると仮定する：ここで $\zeta(2) = \dfrac{h}{g}$.

$$g|A_n + B_n\zeta(2)| = g|A_n + hB_n| \geq 1 \tag{4}$$

一方

$$g|A_n + B_n\zeta(2)| < g \cdot 2\left\{ \frac{48}{59} \right\}^n \tag{5}$$

(5) は十分大きな n に対して 1 より小さい。このことは (4) に矛盾する。したがって $\zeta(2)$ は無理数である。 ∎

4 交代オイラーの定数

交代オイラーの定数の定義式は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right)$ である。J.Sondow によってこの定数は、次のように積分表現されることが示された ([Son05])：

定理 7

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right) = \int_0^1\int_0^1 \frac{1-x}{(1+xy)(-\log xy)}dxdy = \log\frac{4}{\pi}$$

証明

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\log\frac{n+1}{n}$$

となる。

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2$$

である。また、後者は Wallis の積の対数になる。

$$\log\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^{n-1}}\right) = \log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\right) = \log\frac{\pi}{2}$$

したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right) = \log\frac{4}{\pi} = \log 2 - \log\frac{\pi}{2} = \log 2 - \log\pi + \log 2$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^1 \frac{1-x}{(1+xy)(-\log xy)}dxdy &= \int_0^1\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1-x}{-\log xy}(xy)^n dxdy \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1\int_0^1 (1-x)\frac{(xy)^n}{-\log xy}dxdy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^1 \int_n^{\infty} (1-x)(xy)^t dxdydt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_n^{\infty} \left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}\right)\left(\frac{1}{t+1}\right) dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{1}{(t+1)(t+2)}\right) dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}\right) dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left\{\frac{1}{n+1}-\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \left\{\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} = \log\frac{4}{\pi}
\end{aligned}
$$

∎

参 考 文 献

[Beu79] F.Beukers, A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$, Bull.London Math.Soc. Vol.11,1979,pp.268–272

[Cha04] R.Chapman, A proof of Hadjicostas's conjecture, http://arXiv.org/abs/math/0405478

[Had04] P.Hadjicostas, A conjecture-generalization of Sondow's formula, http://arXiv.org/abs/math/0405423

[Son98] J.Sondow, An antisymmetric formula for Euler's constant, Math. Mag. Vol.71,1998,pp.219–220

[Son03] J.Sondow, Criteria for irrationality of Euler's constant, Proc.A.M.S. Vol.131,2003, pp.3335–3344

[Son03a] J.Sondow, An Infinite Product for γ via Hypergeometric Formulas for Euler's constant γ, http://arXiv.org/abs/math/0306008

[Son04] J.Sondow, A faster product for π and a new integral for ln $\frac{\pi}{2}$, http://arXiv.org/abs/math/0401406

[Son05] J.Sondow, Double Integrals for Euler's Constant and Ln $\frac{4}{\pi}$ and an Analog of Hadjicostas's Formula, Amer. Math. Monthly Vol. 112, 2005, pp.61 – 65